الفصل الثاني

الدوال المتجهة

- تكتب الدالة المتجهة على النحو $F(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$.

$F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$

طويلة الدالة $F(t)$:

$$|F(t)| = \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2}$$

- في هذا الفصل نستبدل متجه ← دالة متجهة
عدد ← دالة سلمية

- لتكن $G(t) = g_1(t)\, i + g_2(t)\, j + g_3(t)\, k$.

$F(t) = f_1(t)\, i + f_2(t)\, j + f_3(t)\, k$ دالتان متجهتان

و $h(t)$ دالة سلمية حيث $t \in [a,b]$

عندئذٍ :

1) $(F+G)(t) = F(t) + G(t)$
$= [f_1(t) + g_1(t)]\, i + [f_2(t) + g_2(t)]\, j + [f_3(t) + g_3(t)]\, k$
الناتج دالة متجهة

2) $(h.F)(t) = h(t).F(t)$
$= h(t).f_1(t)\, i + h(t) f_2(t)\, j + h(t) f_3(t)\, k \rightarrow$ الناتج دالة متجهة

3) $(G.F)(t) = f_1(t).g_1(t) + f_2(t).g_2(t) + f_3(t).g_3(t) \rightarrow$ الناتج دالة سلمية (عدد)

4) $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix} \rightarrow$ الناتج دالة متجهة

للدالة $F(t)$ لها نهاية A عندما t تسعى إلى t_0 $\qquad \lim\limits_{t\to t_0} F(t)=A$ $\qquad$ **نهاية دالة متجهة**

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : |t-t_0|<\delta \Rightarrow |F(t)-A|<\varepsilon \qquad 0<\delta \ \exists A$$
$$\forall t\in[a,b]$$

لتكن $F(t)=f_1(t)\,i+f_2(t)\,j+f_3(t)\,k$

$$A=a_1\, i+a_2\, j+a_3\, k$$

نقول إن للدالة $F(t)$ نهاية تساوي A عندما $t\to t_0$ ونكتب:

$$\lim_{t\to t_0}\left[f_1(t)\,i+f_2(t)\,j+f_3(t)\,k\right]=a_1\, i+a_2\, j+a_3\, k$$

إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t)=a_i \quad ; \quad i=1,2,3$$

خواص

1) $\lim\limits_{t\to t_0} F(t)=\left(\lim\limits_{t\to t_0} f_1(t),\ \lim\limits_{t\to t_0} f_2(t),\ \lim\limits_{t\to t_0} f_3(t)\right)$

2) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[F(t)\mp G(t)\right]=\lim\limits_{t\to t_0} F(t)\mp \lim\limits_{t\to t_0} G(t)$

3) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[F(t)\cdot G(t)\right]=\lim\limits_{t\to t_0} F(t)\cdot \lim\limits_{t\to t_0} G(t)$

4) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[F(t)\times G(t)\right]=\lim\limits_{t\to t_0} F(t)\times \lim\limits_{t\to t_0} G(t)$

5) $\lim\limits_{t\to t_0} \underbrace{h(t)}_{\text{سلمية}}\,F(t)=\lim\limits_{t\to t_0} h(t)\cdot \lim\limits_{t\to t_0} F(t)$

استمرار الدالة المتجهة

الدالة F مستمرة في النقطة $t_0 \in X$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$

- وتكون الدالة F مستمرة على الفترة X إذا كانت مستمرة في كل نقطة من نقاط X.

- لتكن F و G دالتان متجهتان مستمرتان على X و h دالة سلمية مستمرة على X

$\Leftarrow$ $F+G,\ F.G,\ F_xG,\ hF$ مستمرة على X.

اشتقاق الدالة المتجهة

لتكن F دالة متجهة معرفة ومستمرة على $[a,b]$

إن مشتق الدالة F في النقطة t من $[a,b]$ هو دالة متجهة تعرف بالشكل:

$$F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

موجودة هذه النهاية ليكون للدالة مشتقة

- $F(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $F'(t)$ موجودة في نقاط الفترة $[a,b]$

$$F'(t) = f_1'(t)\, i + f_2'(t)\, j + f_3'(t)\, k$$

- $F(t)$ قابلة للاشتقاق على فترة ما $\Leftrightarrow$ مركباتها قابلة للاشتقاق على تلك الفترة

ومشتقها بالعلاقة

- خواص

1. $[F(t) + G(t)]' = F'(t) + G'(t)$

2. $[h(t).F(t)]' = h(t)\,F'(t) + h'(t).F(t)$

3. $[F(t).G(t)]' = F'(t).G(t) + F(t).G'(t)$

4) $[F(t)\times G(t)]' = F'(t)\times G(t) + F(t)\times G'(t)$

5) $\left(F(t), G(t), H(t)\right)' = \left(F'(t), G(t), H(t)\right) + \left(F(t), G'(t), H(t)\right) + \left(F(t), G(t), H'(t)\right)$

6) $\left[F(t)\times\left(G(t)\times H(t)\right)\right]' = \left(F'(t)\times\left(G(t)\times H(t)\right)\right) + \left(F(t)\times\left(G'(t)\times H(t)\right)\right) + \left(F(t)\times\left(G(t)\times H'(t)\right)\right)$

- نتيجة ١ بفرض F دالة متجهة قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ وبفرض أن للدالة F طول ثابت. لكل $t\in[a,b]$; أي " $|F(t)| = Const$ ".

$\Leftarrow$ $F(t)$ تعامد $F'(t)$ على $[a,b]$.

أي إن مشتق الدالة المتجهة الثابتة عمودي على هذه الدالة ".

م الإثبات: يكفي أن نبين أن $F(t).F'(t)=0$ لكل $t\in[a,b]$

لدينا $|F(t)| = Const$

$$\Rightarrow |F(t)|^2 = Const \quad ; \forall t\in[a,b]$$

$$\Rightarrow F(t).F(t) = const$$ حيث $|V|^2 = V.V$

بالاشتقاق:

$$F'(t).F(t) + F(t).F'(t) = 0$$

$$\Rightarrow 2F'(t)F(t) = 0 \Rightarrow F'(t).F(t) = 0$$

وهذا يعني أن $F(t) \perp F'(t)$

نتيجة 2 | الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $F(t)$ ثابتة الجهة ومتغيرة الطول هو أن توازي مشتقها $F'(t)$.

⇐ الإثبات: بفرض $F(t)$ دالة متغيرة الطول وثابتة الجهة، وليكن k دالة الوحدة المتجهة الموازية لـ $F(t)$. عندئذٍ يكون:

$$F(t) = f(t)\, k \qquad \text{حيث} \qquad f(t) = |F(t)|$$

و k دالة ثابتة «أي إن $k' = 0$».

لنثبت أن $F(t)$ توازي مشتقها:

نشتقه: $F'(t) = f'(t)\, k + \underbrace{f(t)\, k'}_{=0}$

$$\Rightarrow F'(t) = f'(t)\, k .$$

وهذا يعني أن $F'(t)$ توازي k وبالتالي فهي توازي $F(t)$.

⇒ بفرض $F(t)$ دالة توازي الدالة $F'(t)$ (مشتقها) من أجل كل قيمة t من مجال تعريفها.

لنبين أن $F(t)$ ثابتة الجهة:

1) من العلاقة $F(t) = f(t)k$ إذا كانت k ثابتة فإن $F(t)$ ثابتة الجهة

2) لنفرض جدلاً أن k متغيرة عندئذٍ لدينا:

$$F'(t) = f'(t)\, k + f(t)\, k'$$

وبما أن $F(t)$ توازي $F'(t)$ فإن: $F(t) \times F'(t) = 0$

$$\Rightarrow f(t)\, k \times [f'(t)\, k + f(t)\, k'] = 0$$

$$\Rightarrow f^2(t)\, [k \times k'] = 0$$

$k \times k = 0$

ولدينا $f(t) \neq 0 \Leftarrow k \times k' = 0$

أي إن $k \parallel k'$ ولكن هذا لا يمكن لأن k ليست ثابتة الجهة

وبالتالي $k' = 0 \Leftarrow k = \text{Const}$ أي الفرض الجدلي 2 مرفوض

$F(t) \Leftarrow$ ثابتة الجهة.

$\boxed{\text{مثال}_1}$ بفرض $F(t)=\cos t\, i+\sin t\, j$ حيث $0\leqslant t<2\pi$

لدينا: $|F(t)|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1=const$

$\Leftarrow$ $F(t)\,,\,F'(t)$ متعامدان على $[0,2\pi]$

لنتأكد: $F'(t)=-\sin t\, i+\cos t\, j$

$$F(t).F'(t)=(\cos t)(-\sin t)+(\sin t)(\cos t)=0$$

$\boxed{\text{مثال}_2}$ بفرض

$$\left\{\begin{array}{l} F(t)=\ln t\; i+\cos t\; k \\ G(t)=t^2 j+e^t k \end{array}\right. \quad \text{لكل } t>0$$

أوجد مشتق $F(t).G(t)$ بطريقتين مختلفتين.

الحل: $\boxed{\text{الطريقة الأولى}}$

$$F(t).G(t)=(\ln t)(0)+(0)(t^2)+(e^t)(\cos t)$$
$$=e^t\cos t$$

$$\big(F(t).G(t)\big)'=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$$

$\boxed{\text{الطريقة الثانية}}$

$$\big(F(t).G(t)\big)'=F'(t).G(t)+F(t).G'(t)$$

$$=\left(\frac{1}{t}i-\sin t\,k\right)\left(t^2 j+e^t k\right)+\left(\ln t\, i+\cos t\, k\right)\left(2t\, j+e^t k\right)$$

أو نرتب

$F'(t)=(\frac{1}{t},0,-\sin t)$ $\qquad$ $F(t)=(\ln t,0,\cos t)$

$G'(t)=(0,2t,e^t)$ $\qquad$ $G(t)=(0,t^2,e^t)$

ونضع النتائج فوراً

$$=0+0-e^t\sin t+0+0+e^t\cos t=e^t(\cos t-\sin t)$$

مثال 3 | نفرض $F(t)=t^2 i+e^t k$ $\quad G(t)=t\,i+\sin t\, j+k$

أوجد $(F(t)\times G(t))'$ بطريقتين مختلفتين

الحل : ط$_1$:

$$F(t)\times G(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ t^2 & 0 & e^t \\ t & \sin t & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-e^t\sin t\, i+(t e^t-t^2)j+t^2\sin t\, k$$

$$\Rightarrow (F(t)\times G(t))'=(-e^t\sin t-e^t\cos t)i+(e^t+te^t-2t)j$$

$$+(2t\sin t+t^2\cos t)k$$

ط$_2$:

$$(F(t)\times G(t))'=F'(t)\times G(t)+F(t)\times G'(t)$$

$$F'(t)\times G(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2t & 0 & e^t \\ t & \sin t & 1 \end{vmatrix}=-e^t\sin t\, i+(te^t-2t)j+2t\sin t\, k$$

$$F(t)\times G'(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ t^2 & 0 & e^t \\ 1 & \cos t & 0 \end{vmatrix}=-e^t\cos t\, i+e^t j+t^2\cos t\, k$$

$$\Rightarrow (F(t)\times G(t))'=(-e^t\sin t-e^t\cos t)i+(e^t+te^t-2t)j$$

$$+(2t\sin t+t^2\cos t)k$$

المشتقات من مراتب عليا

$F(t) = f_1(t)\,i + f_2(t)\,j + f_3(t)\,k$

$F'(t) = f_1'(t)\,i + f_2'(t)\,j + f_3'(t)\,k$

المشتقة الثانية $F''(t) = f_1''(t)\,i + f_2''(t)\,j + f_3''(t)\,k$

$\vdots$ وبالمثل المشتقة الثالثة والرابعة
حتى n ...

- نقول إن الدالة المتجهة $F(t)$ تنتمي إلى صف الدوال القابلة للاشتقاق حتى المرتبة n على $[a,b]$ ، نرمز $F(t) \in C^n$ ، إذا كانت قابلة للاشتقاق حتى المرتبة n على $[a,b]$.

مثال : $F(t) = \cos t\, i + \sin t\, j \in C^\infty$. قابلة للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات .

- المشتق الموجه لحقول المتجهات

ادرس التعريف من النظري . هام .

مثال ١ أوجد المشتق الموجه للدالة $F = 2x^2 + xy + yz^2$ في النقطة $(1,-1,2)$ في اتجاه المتجه $A = i - 2j + 2k$

الحل :

$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x + y$ نغير x و z, y ثوابت

$\frac{\partial F}{\partial y} = x + z^2$ نغير y و x, z ثوابت

$\frac{\partial F}{\partial z} = 2yz$

وفي النقطة $(1,-1,2)$ نجد :

$\frac{\partial F}{\partial x} = 4 - 1 = 3$ $\quad$ $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 4 = 5$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 2(-1)(2) = -4$

لإيجاد متجه الوحدة باتجاه المتجه A :

$|A| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

فيكون $u = \frac{A}{|A|}$ أي :

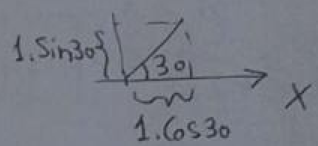
$u = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

يكون :
$$\frac{dF}{ds}(1,-1,2) = (3)\left(\frac{1}{3}\right) + (5)\left(-\frac{2}{3}\right) + (-4)\left(\frac{2}{3}\right)$$
المشتقة الموجهة للدالة F
$$= 1 - \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = 1 - 6 = -5$$

مثال 2 أوجد المشتق الموجه للدالة : $F(x,y) = x^2 y + 2\ln y$
في النقطة $(1,1)$ باتجاه الخط الذي يصنع زاوية قدرها 30° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل :
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2yx \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \frac{2}{y}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1 + 2 = 3$$

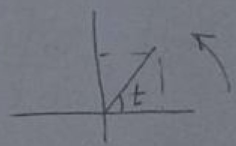
متجه الوحدة باتجاه الخط المعطى هو $u = \cos 30\, i + \sin 30\, j$
$$\Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{1}{2} j$$



$$\Rightarrow \frac{dF}{ds}(1,1) = (2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (3)\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

مثال 3 أوجد المشتق الموجه للدالة $F = xy$ على الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$
باتجاه عكس عقارب الساعة «أي مطلوب ايجاد المشتق المماسي»

الحل : المعادلة الاتجاهية للدائرة بعكس عقارب الساعة هي :



$$R(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j \quad ; \quad t \geq 0$$
$$\Rightarrow R'(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j$$
$$|R'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = \sqrt{a^2} = a$$
$$\Rightarrow T = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = -\sin t\, i + \cos t\, j$$

متجه وحدة هو متجه وحدة المماس

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{ds} = (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) = -y\sin t + x\cos t$$

ونعلم أن :

$$x = a\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{x}{a}$$

$$y = a\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{y}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{ds} = -y\left(\frac{y}{a}\right) + x\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x^2 - y^2}{a}$$

- $\boxed{\text{تدرج حقل سلمي}}$ ليكن $F(x,y,z)$ حقل سلمي

$$\text{grad}\, F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k$$ ← تدرج الحقل السلمي

- $\boxed{\text{تعريف المؤثر التفاضلي المتجهي } \nabla}$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

- لاحظ إذا كانت $F(x,y,z)$ سلمية فإن :

الجداء الداخلي متجه — سلمية

متجه

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} = \text{grad}\, F$$

- أما اذا كانت

$$A = f(x,y,z)\, i + g(x,y,z)\, j + h(x,y,z)\, k$$ ← دالة متجهة

$$\Rightarrow \nabla \cdot A = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

متجه — متجه

الجداء الداخلي عدد بالاصطلاح واحد

خواص

① $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

② $\nabla(cf) = c\,\nabla f \quad ; c = const$

③ $\nabla(fg) = (f)(\nabla g) + (\nabla f)(g)$

④ $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\nabla f)(g) - (\nabla g) f}{g^2} \quad ; g \neq 0$

الإثبات بسيط : مثلاً لنثبت ③

$$\nabla(fg) = \frac{\partial(fg)}{\partial x} i + \frac{\partial(fg)}{\partial y} j + \frac{\partial(fg)}{\partial z} k$$

$$= \left[f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x} \right] i + \left[f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y} \right] j + \left[f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z} \right] k$$

$$= f\frac{\partial g}{\partial x} i + f\frac{\partial g}{\partial y} j + f\frac{\partial g}{\partial z} k + g\frac{\partial f}{\partial x} i + g\frac{\partial f}{\partial y} j + g\frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$= f\left[\frac{\partial g}{\partial x} i + \frac{\partial g}{\partial y} j + \frac{\partial g}{\partial z} k \right] + g\left[\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right]$$

$$= (f)(\nabla g) + (g)(\nabla f)$$

مثال١ إذا كان $R = x i + y j + z k$ أوجد :

① $\nabla(\ln|R|)$ ② $\nabla\left(\frac{1}{|R|}\right)$

الحل :

① $|R| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\ln|R| = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$\nabla \ln|R| = \frac{1}{2}\nabla\left[\ln(x^2+y^2+z^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial[\ln(x^2+y^2+z^2)]}{\partial x} i + \frac{\partial[\ln(x^2+y^2+z^2)]}{\partial y} j + \frac{\partial[\ln(x^2+y^2+z^2)]}{\partial z} k\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} i + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} j + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} k\right]$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2+z^2} i + \frac{y}{x^2+y^2+z^2} j + \frac{z}{x^2+y^2+z^2} k$$

$$= \frac{xi+yj+zk}{x^2+y^2+z^2} = \frac{R}{|R|^2}$$

(2) $$\frac{1}{|R|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|R|}\right) = \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x} i + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial y} j + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-}}{\partial z}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} i + \left(-\frac{1}{2}\right)(2y)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} j +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)(2z)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} k$$

$$= -\frac{xi+yj+zk}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R}{(|R|^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R}{|R|^3}$$

ملاحظة 1: إذا أعطينا السطح المماسي $f(x,y,z)=c$

فإن $\nabla f(p_0)$ عمودي على السطح في النقطة p_0

إن المتجه:

$$n = \frac{\nabla f(p_0)}{|\nabla f(p_0)|}$$ هو متجه الوحدة العمودي على السطح.

ويكون معادلة المستوي المماس:

$$(R^* - R_0)\,\nabla f(p_0) = 0$$

متجه الموضع لنقطة ما من المستوي المماس

متجه الموضع في النقطة p_0

والتي تكتب بالشكل التحليلي:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{p_0}(x^* - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{p_0}(y^* - y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{p_0}(z^* - z_0) = 0$$

تعني المستوي المماس أيضاً المعادلة هنا

(عندما السطح مغلق كرة مثلاً)

ملاحظة 2: اذا كان السطح يعطى بالمعادلة $f(x,y,z)=c$ فإن المشتق الموجه للحقل السلمي على السطح المستوي باتجاه وحدة الناظم الخارجي يسمى المشتق الناظمي الخارجي للحقل السلمي على السطح.

متجه وحدة الناظم الخارجي

$$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

وبالتالي المشتق الناظمي الخارجي للحقل السلمي g على السطح يكون:

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot n$$

حيث: اذا كان السطح مغلق نسمي متجه وحدة الناظم الموجه خارجاً متجه وحدة الناظم الخارجي على السطح.

$x^2+y^2+z^2=9$ **مثال،** أوجد متجه وحدة الناظم الخارجي على الكرة

$(2,1,2)$ ثم أوجد معادلة المستوي المماس في النقطة

الحل: لدينا: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$$\nabla f=\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}i+\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y}j+\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z}k$$

$$\Rightarrow \nabla f=2x\,i+2y\,j+2z\,k$$

فيكون متجه الناظم الخارجي على الكرة:

$$n=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\quad ; \quad |\nabla f|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}=2\sqrt{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{9 \text{ حسب الفرض}}}$$

$$=2\times\sqrt{9}=2\times 3$$

$$\Rightarrow n=\frac{\cancel{2}x\,i+\cancel{2}y\,j+\cancel{2}z\,k}{\cancel{2}\times 3}$$

$$\Rightarrow n=\frac{1}{3}x\,i+\frac{1}{3}y\,j+\frac{1}{3}z\,k$$

وتكون معادلة المستوي المماس:

x^* ما بتفرق عن x'

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1,2)}(x^*-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1,2)}(y^*-y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(2,1,2)}(z^*-z_0)=0$$

$$(2x)\Big|_{(2,1,2)}(x-2)+(2y)\Big|_{(2,1,2)}(y-1)+(2z)\Big|_{(2,1,2)}(z-2)=0$$

$$\Rightarrow 4(x-2)+2(y-1)+4(z-2)=0$$

$$\Rightarrow 4x-8+2y-2+4z-8=0$$

$$\Rightarrow 4x+2y+4z-18=0 \Rightarrow 2x+y+2z-9=0$$

مثال 2 / أوجد المشتق الناظمي الخارجي للحقل $g(x,y,z)=xy+yz+zx$

على السطح

$$x^2+y^2+z^2=1$$

الحل :

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

$$\nabla f = 2x\, i + 2y\, j + 2z\, k$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad ; \quad |\nabla f| = 2\sqrt{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{1}} = 2$$

$$\Rightarrow \vec{n} = x\, i + y\, j + z\, k$$

$$g(x,y,z) = xy + yz + zx$$

$$\nabla g = \frac{\partial(xy+yz+zx)}{\partial x} i + \frac{\partial(xy+yz+zx)}{\partial y} j + \frac{\partial(xy+yz+z}{\partial z}$$

$$= (y+z)\, i + (x+z)\, j + (y+x)\, k$$

فيكون :

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot n$$

$$= (y+z)\cdot x + (x+z)\cdot y + (y+x)\cdot z$$

$$= yx + zx + xy + zy + yz + xz$$

$$= 2xy + 2yz + 2xz$$

كحالة خاصة في النقطة $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ من السطح يكون :

$$\frac{\partial g}{\partial n} = 2(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}) + 2(-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + 2(-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

تباعد (تفرق) حقل متجهي (دالة متجهة)

$$\operatorname{div} A = \nabla . A = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

سبق وذكرنا

حيث :

$$A = f(x,y,z)\, i + g(x,y,z)\, j + h(x,y,z)\, k$$

المؤثر التفاضلي ∇^2 (المؤثر اللابلاسي)

$$\nabla^2 = \nabla . \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

لاحظ :

$$\nabla^2 A = \nabla . \underbrace{\nabla A}_{\operatorname{div} A} = \nabla (\operatorname{div} A) = \operatorname{div}(\operatorname{div} A)$$

$$\nabla^2 F = \nabla . \underbrace{\nabla F}_{\operatorname{grad} F} = \nabla (\operatorname{grad} F) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} F)$$

دالة سلمية

لنثبت ذلك

حيث :

$$\nabla . \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f$$

$$= \nabla^2 f$$

$\boxed{\text{خواص تباعد حقل متجهي}}$

A, B دالتان متجهتان

F دالة سلمية

1) $\operatorname{div}(A+B) = \operatorname{div} A + \operatorname{div} B$

2) $\operatorname{div}(F \cdot A) = F \operatorname{div} A + A \operatorname{grad} F$

نثبت 2) حيث:

$A = f(x,y,z)\, i + g(x,y,z)\, j + h(x,y,z)\, k$

$F(x,y,z)$ سلمية

$$\operatorname{div}(FA) = \nabla(FA) = \nabla(Ff\, i + Fg\, j + Fh\, k)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(Ff) + \frac{\partial}{\partial y}(Fg) + \frac{\partial}{\partial z}(Fh)$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot f + F \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot g + F \frac{\partial g}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} h + F \frac{\partial h}{\partial z}\right)$$

$$= F \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div} A} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot f + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot g + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot h}_{A \operatorname{grad} F}$$

$$= F \operatorname{div} A + A \operatorname{grad} F$$

$\boxed{\text{مثال}}$ أوجد التباعد لكل من الحقول:

1) $F = x^2 y\, i + e^y z\, j + x \sin z\, k$

2) $G = \operatorname{grad} f \,;\ f = x^2 z + z^2 x$

الحل:

$\operatorname{div} F = \nabla F =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)\left(x^2 y i + e^y z j + x \sin z\, k\right)$$

$$= \frac{\partial (x^2 y)}{\partial x} + \frac{\partial (e^y z)}{\partial y} + \frac{\partial (x \sin z)}{\partial z}$$

$$= 2xy + z e^y + x \cos z$$

(2) $G = \operatorname{grad} f$

$f = x^2 z + z^2 x$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial (x^2 z + z^2 x)}{\partial x} i + \frac{\partial (x^2 z + z^2 x)}{\partial y} j + \frac{\partial (x^2 z + z^2}{\partial z}$$

$$= (2xz + z^2) i + 0 j + (x^2 + 2xz) k$$

$$\operatorname{div} G = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial (2xz + z^2)}{\partial x} + \frac{\partial (x^2 + 2xz)}{\partial z}$$

$$= 2z + 2x$$

مثال 2 نفرض $f(x,y,z) = x^2 y z$

$$F(x,y,z) = x z i + y^2 j + x^2 z k$$

حقق الخاصية:

$$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \operatorname{grad} f$$

الحل:

$$f.F = x^2 y z \left[x z i + y^2 j + x^2 z k\right]$$

$$= x^3 y z^2 i + x^2 y^3 z j + x^4 y z^2 k$$

$$\operatorname{div}(fF) = \nabla(fF) = \frac{\partial (x^3 y z^2)}{\partial x} + \frac{\partial (x^2 y^3 z)}{\partial y} + \frac{\partial (x^4 y z^2)}{\partial z}$$

$$= 3x^2yz^2 + 3x^2y^2z + 2x^4yz$$

- $$\operatorname{div} F = \nabla F = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2z)}{\partial z}$$

$$= z + 2y + x^2$$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial(x^2yz)}{\partial x} i + \frac{\partial(x^2yz)}{\partial y} j + \frac{\partial(x^2yz)}{\partial z} k$$

$$= (2xyz)i + (x^2z)j + (x^2y)k$$

$$f \cdot \operatorname{div} F + F \operatorname{grad} f =$$

$$(x^2yz)(z+2y+x^2) + (xz)(2xyz) + (y^2)(x^2z) + (x^2z)(x^2y)$$

$$= x^2yz^2 + 2x^2y^2z + x^4yz + 2x^2yz^2 + x^2y^2z + x^4yz$$

$$= 3x^2yz^2 + 3x^2y^2z + 2x^4yz$$

بالمقارنة بين المساواة محققة.

$\boxed{\text{مثال 3}}$ اذا كان $r = xi + yj + zk$ اثبت أن $\nabla^2 \frac{1}{|r|} = 0$

الحل : $|r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{1}{|r|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|r|}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - \left(-\tfrac{3}{2}\right)(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(x)$$

$$= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-(x^2+y^2+z^2)+3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$(x^2+y^2+z^2)$ $\qquad$ (1)

$$= \frac{+2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

بالمثل نجد :

$$\frac{\partial^2 (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$\Rightarrow$ بالجمع : $\dfrac{2x^2-y^2-z^2+2y^2-x^2-z^2+2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$

$\boxed{\text{مثال 4}}$ بين أن المتجه

$A = (x^2+y^2)i + y\sin z\, j + (-2xz+\cos z)k$

لولبياً.

الحل : حتى تكون المتجه A لولبي يجب أن تحقق : $\operatorname{div} A = 0$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} + \frac{\partial (y\sin z)}{\partial y} + \frac{\partial (-2xz+\cos z)}{\partial z}$$

$= 2x + \sin z - 2x - \sin z = 0 \Rightarrow$ A متجه لولبي

$A = f(x,y,z)\, i + g(x,y,z)\, j + h(x,y,z)\, k$

$\boxed{\text{دوران حقل متجهي}}$

$$\text{rot}\, A = \nabla \times A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{المعنى الهندسي للدوران}}$

$\omega = \frac{1}{2}\, \text{rot}\, V$

متجه السرعة الزاوية

متجه السرعة الخطية

نقرأ منه النظري إذا كان معطى.

$\boxed{\text{خواص دوران حقل متجهي}}$

1. $\text{rot}(A+B) = \text{rot}\, A + \text{rot}\, G$
2. $\text{rot}(F A) = F\, \text{rot}\, A + \text{grad}\, F \times A$

سلمية

3. $\text{div}(A \times B) = B\, \text{rot}\, A - A\, \text{rot}\, B$
4. $\text{rot grad}\, F = 0$
5. $\text{div rot}\, A = 0$
6. $\text{rot rot}\, A = \text{grad div}\, A - \nabla^2 A$

إثبات الخاصة 4) : $F(x,y,z)$; $\text{rot grad}\, F = 0$

$$\text{rot grad}\, F = \nabla \times \nabla F = \nabla \times \left[\frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k \right]$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= i\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right] - j\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]$$

$$+ k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]$$

$$= i\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right) - j\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right) + k\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial}\right.$$

$$= 0$$

إثبات الخاصة (5):

$$\text{div rot } A = 0$$

$$A = f(x,y,z)\, i + g(x,y,z)\, j + h(x,y,z)\, k$$

$$\text{rot } A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = i\left(\cancel{\frac{\partial g}{\partial x}}\ \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

$$- j\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$+ k\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\text{div rot } A = \nabla \cdot (\text{rot } A) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

وهو المطلوب

إثبات الخاصية 6 :

$$\text{rot rot} A = \text{grad div} A - \nabla^2 A$$

$$\text{rot rot} A = \nabla \times (\nabla \times A)$$

ولدينا سابقاً :

$$A \times (B \times C) = B(A.C) - (A.B).C$$

نأخذ $A = B = \nabla$ و $C = A$

فنحصل على :

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla A) - (\nabla . \nabla) A$$

$$= \nabla(\underbrace{\nabla A}) - \nabla^2 A$$

$$= \text{grad}\ \text{div} A - \nabla^2 A$$

ملاحظات : نفرض :

$$A(x,y,z) = f(x,y,z)\,i + g(x,y,z)\,j + h(x,y,z)\,k$$ دالة متجهة

$F(x,y,z)$ دالة سلمية

المؤثر التفاضلي $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$

يطبق على الدالة المتجهة فيعطي عدد (دالة سلمية)

$$\underbrace{\nabla . A} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

ونعطي $\text{div} A$ تباعد متجه

حقل سلمي

∇ يطبق على دالة سلمية فيعطي دالة متجهة

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k$$

تدرج دالة $\text{grad} F$ ويعطي

يطبق على حقل متجهي ويعطي حقل متجهي

$$\text{rot } A = \nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

تمارين | تمرين ١ | أوجد دوران الحقل المتجهي :

$$F = xy^2 i + x\sin(yz) j + z^2 e^y k$$

الحل :

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x\sin(yz) & z^2 e^y \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial(z^2 e^y)}{\partial y} - \frac{\partial(x\sin(yz))}{\partial z}\right] i - \left[\frac{\partial(z^2 e^y)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial z}\right] j$$

$$+ \left[\frac{\partial(x\sin(yz))}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\right] k$$

$$= \left(z^2 e^y - xy\cos(yz)\right) i - (0 - 0) j + \left(\sin(yz) - 2xy\right) k$$

$$= \left[z^2 e^y - xy\cos(yz)\right] i + \left[\sin(yz) - 2xy\right] k$$

تمرين 2 بين أن دوران الحقل $F = \dfrac{-yi + xj}{x^2+y^2}$

معدوم في كل نقطة $(0,0)$

الحل:

$$F = \frac{-y}{x^2+y^2}\, i + \frac{x}{x^2+y^2}\, j$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} F = i\left[0 - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right] - j\left[0 - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right]$$

$$+ k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]$$

$$= i(0) - j(0) + \left[\frac{(1)(x^2+y^2) - (2x)(x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(1)(x^2+y^2) - (2y)(y)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \left[\frac{-2x^2 + x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] k = 0$$

تمرين 3 لنفرض A متجه ثابت و R متجه الموضع للنقطة (x, y, z)

أثبت أن:

$$\operatorname{rot}(A \times R) = 2A$$

الحل: نفرض: $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

ولدينا: $R = x i + y j + z k$

$$A \times R = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = i(a_2 z - a_3 y) - j(a_1 z - a_3 x) + k(a_1 y - a_2 x)$$

$$\mathrm{rot}(A \times R) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2 z - a_3 y & -a_1 z + a_3 x & a_1 y - a_2 x \end{vmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial(a_1 y - a_2 x)}{\partial y} - \frac{\partial(-a_1 z + a_3 x)}{\partial z}\right]$$

$$-j\left[\frac{\partial(a_1 y - a_2 x)}{\partial x} - \frac{\partial(a_2 z - a_3 y)}{\partial z}\right]$$

$$+k\left[\frac{\partial(-a_1 z + a_3 x)}{\partial x} - \frac{\partial(a_2 z - a_3 y)}{\partial y}\right]$$

$$= i(a_1 + a_1) - j(-a_2 - a_2) + k(a_3 + a_3)$$

$$= 2a_1 i + 2a_2 j + 2a_3 k = 2(a_1 i + a_2 j + a_3 k) = 2A$$

$\boxed{\text{تمرين 4}}$ إذا كان $\nabla \times A = 0$ أثبت أن:

$\nabla(A \times R) = 0$

حيث: $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ ، $A_1(x, y, z)$

$R = x i + y j + z k$

طريقة 1 :

$$A \times R = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= i(A_2 z - A_3 y) - j(A_1 z - A_3 x) + k(A_1 y - A_2 x)$$

$$\nabla(A \times R) = \frac{\partial}{\partial x}(A_2 z - A_3 y) + \frac{\partial}{\partial y}(-A_1 z + A_3 x) + \frac{\partial}{\partial z}(A_1 y - A_2 x)$$

استعملنا مو موجود كونها ثابتة لـ x, y, z

$$= z\frac{\partial A_2}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial A_3}{\partial x} - z\frac{\partial A_1}{\partial y} + x\frac{\partial A_3}{\partial y} + y\frac{\partial A_1}{\partial z} - x \cdot \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$= x\left[\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right] + y\left[\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right] + z\left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial}\right.$$

$$= (xi + yj + zk)\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right.\right.$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \\ &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \end{aligned}}$$

$$= R \cdot (\underbrace{\nabla \times A}_{=0}) = R \cdot 0 = 0$$

طريقة 2 نعلم أن :

$$A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (A \times R) = R \cdot (\underbrace{\nabla \times A}_{=0}) = 0$$

تمرين $\boxed{5}$ أثبت أن $rot(R \cdot f(r)) = 0$ حيث

$f(r)$ تابع سلمي قابل للمفاضلة و $R = xi + yj + zk$

و $r = |R|$

الحل :

$$rot(R \cdot f(r)) = \nabla \times (r \cdot f(r)) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x f(r) & y f(r) & z f(r) \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(z f(r)) - \frac{\partial}{\partial z}(y f(r))\right] i - \left[\frac{\partial}{\partial x}(z f(r)) - \frac{\partial}{\partial z}(x f(r))\right] j$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(y f(r)) - \frac{\partial}{\partial y}(x f(r))\right] k$$

$$= \left[z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z}\right] i - \left[z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z}\right] j$$

$$+ \left[y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}\right] k$$

لأن r تابعة لـ x, y, z فالمشتقات جزئي

$f(r) : r = |R| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x}$$

لأن تابع بالنسبة لـ r فقط

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\cancel{2} x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{x}{r}$$

بالمثل :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{z}{r}$$

تعويض:

$$\Rightarrow rot(R.f(r)) = \left(z\frac{df}{dr}\cdot\frac{y}{r} - y\frac{df}{dr}\cdot\frac{z}{r}\right)i$$

$$-\left(z\frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{r} - x\frac{df}{dr}\cdot\frac{z}{r}\right)j + \left(y\frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{r} - x\frac{df}{dr}\cdot\frac{y}{r}\right)k$$

$$= \left(\frac{yz}{r}\frac{df}{dr} - \frac{yz}{r}\frac{df}{dr}\right)i - \left(\frac{xz}{r}\frac{df}{dr} - \frac{xz}{r}\frac{df}{dr}\right)j$$

$$+\left(\frac{xy}{r}\frac{df}{dr} - \frac{xy}{r}\frac{df}{dr}\right)k = 0 - 0 + 0 = 0$$

$\boxed{\text{تمارين}}$ $\boxed{\text{تمرين 1}}$ إذا كان:

$$A(x,y,z) = xz\vec{i} + e^{yz}j - \ln(xy)k$$

$$\phi(x,y,z) = xy^2z^3$$

أوجد:

(a) $grad\,\phi$ (b) $div\,A$

(c) $rot\,A$ (d) $div(\phi A)$

(e) $div(rot\,A)$ (f) $rot(grad\,\phi)$

الحل:

$$(a)\quad grad\,\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k$$

$$= \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial x}i + \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial y}j + \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial z}k$$

$$= y^2z^3\,i + 2xyz^3\,j + 3xy^2z^2\,k$$

$$(b)\quad div\,A = \nabla\cdot A = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(e^{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(-\ln(xy))}{\partial z}$$

$$= z + ze^{yz} + 0 = z + ze^{yz}$$

(c) $\operatorname{rot} A = \nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & e^{yz} & -\ln xy \end{vmatrix}$

$$= i\left(\frac{\partial(-\ln(xy))}{\partial y} - \frac{\partial(e^{yz})}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial(-\ln(xy))}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial z}\right)$$

$$+ k\left(\frac{\partial(e^{yz})}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{-x}{xy} - y\, e^{yz}\right) i - \left(\frac{-y}{xy} - x\right) j + (0-0)k$$

$$= \left(-\frac{1}{y} - y\, e^{yz}\right) i + \left(\frac{1}{x} + x\right) j$$

(d) $\operatorname{div}(\phi A) = \nabla \cdot (\phi A) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y^2 z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(x y^2 e^{yz} z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(-x y^2 z^3 \ln(xy))$$

$$= 2xy^2 z^4 + 2xy\, e^{yz} z^3 + xy^2 e^{yz} z^4 - 3xy^2 z^2 \ln(xy)$$

(e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = \nabla \cdot (\nabla \times A) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y} - y\, e^{yz}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} + x\right) = 0$$

(f) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \nabla \times (\nabla \cdot \phi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \end{vmatrix}$

Scanned by CamScanner

$$= i\left[\frac{\partial(3xy^2z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2xyz^3)}{\partial z}\right] - j\left[\frac{\partial(3xy^2z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2z^3)}{\partial z}\right]$$

$$+ k\left[\frac{\partial(2xyz^3)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2z^3)}{\partial y}\right]$$

$$= [6xyz^2 - 6xyz^2]\, i - [3y^2z^2 - 3y^2z^2]\, j + [2yz^3 - 2yz^3]\, \vec{k} = 0$$

تمرين 1 بفرض: $F(t) = \sin t\, i + \cos t\, j + t\, k$ دالة متجهة

المطلوب: أوجد $F'(t),\ F''(t),\ |F'(t)|,\ |F''(t)|$

الحل:

$$F'(t) = \cos t\, i - \sin t\, j + k$$

$$F''(t) = -\sin t\, i - \cos t\, j$$

$$|F'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$|F''(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

تمرين 2 إذا كانت:

$A(t) = 5t^2\, i + t\, j - t^3 k$ $\qquad (5t^2, t, -t^3) \rightarrow A'(10t, 1, -3t^2)$

$B(t) = \sin t\, i - \cos t\, j$ $\qquad (\sin t, -\cos t, 0) \rightarrow B'(\cos t, \sin t, 0)$

أوجد:

① $(A(t) \cdot B(t))'$ $\qquad$ ② $(A(t) \times B(t))'$

③ $(A(t) \cdot A(t))'$

الحل: طريقة أولى:

① $(A(t) \cdot B(t))' = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t) =$

$(10t\, i + j - 3t^2 k)(\sin t\, i - \cos t\, j) + (5t^2 i + t\, j - t^3 k)(\cos t\, i + \sin t\, j)$

أو فوراً نضع السابق

$= 5t^2\cos t + t\sin t + 10t\sin t - \cos t$

$= (5t^2 - 1)\cos t + 11t\sin t$

طريقة ثانية :

$A(t).B(t) = 5t^2\sin t - t\cos t$

$(A(t).B(t))' = 10t\sin t + 5t^2\cos t - \cos t + t\sin t$

$= 11t\sin t + 5t^2\cos t - \cos t$

$\boxed{2}$ b_1 $(A(t)\times B(t))' = A(t)\times B'(t) + A'(t)\times B(t)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$= i(0 + t^3\sin t) - j(0 + t^3\cos t) + (5t^2\sin t - t\cos t)k$

$+ (-3t^2\cos t)i - (3t^2\sin t)j + (-10t\cos t - \sin t)k$

$= t^3\sin t\, i - t^3\cos t\, j + (5t^2\sin t - t\cos t)k$

$- 3t^2\cos t\, i - 3t^2\sin t\, j + (-10t\cos t - \sin t)k$

$= (t^3\sin t - 3t^2\cos t)i - (t^3\cos t + 3t^2\sin t)j$

$+ (5t^2\sin t - 11t\cos t - \sin t)k$

b_2 $A(t)\times B(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5t^2 & t & -t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$

$= -t^3\cos t\, i - t^3\sin t\, j + (-5t^2\cos t - t\sin t)k$

Scanned by CamScanner

$$(A(t)\times B(t))' = (-3t^2\cos t + t^3\sin t)i + (-3t^2\sin t - t^3\cos t)j$$

$$+(-10t\cos t + 5t^2\sin t - \sin t - t\cos t)k$$

$$= (t^3\sin t - 3t^2\cos t)i - (t^3\cos t + 3t^2\sin t)j$$

$$+(5t^2\sin t - 11t\cos t - \sin t)k$$

③ ط1 $(A(t).A(t))' = A'(t).A(t) + A(t).A'(t)$

$$= 2A(t).A'(t)$$

$$= 2(5t^2 i + tj - t^3 k)(10t\, i + j - 3t^2 k)$$

$$= 100t^3 + 2t - 6t^5$$

ط2 $A(t).A(t) = 25t^4 + t^2 - t^6$

$$(A(t).A(t))' = 100t^3 + 2t - 6t^5$$

$\boxed{\text{تمرين 3}}$ احسب $(V, V', V'')'$

الحل: تذكر بالمحددات: ينعدم المحدد إذا تساوى فيه سطرين

$$(V, V', V'')' = \underbrace{(V', V', V'')}_{=0} + \underbrace{(V, V'', V'')}_{=0} + (V, V', V''') = (V, V', V''')$$

$=0$ لأنه تساوى فيه سطرين V', V'

$\boxed{\text{تمرين 4}}$ أثبت أن:

$$A(t)\times B''(t) - A''(t)\times B(t) = (A(t)\times B'(t) - A'(t)\times B(t))'$$

الحل:

$$(A(t)\times B'(t) - A'(t)\times B(t))' =$$

$$(A(t)\times B'(t))' - (A'(t)\times B(t))' =$$

$$= \left[A'(t)\times B'(t) + A(t)\times B''(t)\right] - \left[A''(t)\times B(t) + A'(t)\times B'(t)\right] =$$

$$= A(t)\times B''(t) - A''(t)\times B(t)$$

وهو المطلوب

$\boxed{\text{تمرين } 5}$ إذا كان $F(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$

أوجد ∇F في النقطة $(1,-2,-1)$

الحل:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)\left(3x^2y - y^3z^2\right)$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y - y^3z^2\right) + j\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y - y^3z^2\right) + k\frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2y - y^3z^2\right)$$

$$= 6xy\, i + (3x^2 - 3y^2z^2)\, j + (-2y^3z)\, k$$

$$\nabla F\Big|_{(1,-2,-1)} = 6(1)(-2)\, i + \left(3(1)^2 - 3(-2)^2(-1)^2\right) j + \left(-2(-2)^3(-1)\right) k$$

$$= -12 i + (3 - 12) j + -16 k$$

$$= -12 i - 9 j - 16 k$$

$\boxed{\text{تمرين } 6}$ بين أن: $\nabla r^n = n\, r^{n-2}\, r$

الحل: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ حيث $R = xi + yj + zk$

$r = |R|$

$$\nabla r^n = \nabla\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n = \nabla\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}\right] + j\frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}\right] +$$

$$+ k\frac{\partial}{\partial z}\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}\right]$$

$$= i\left[\frac{n}{\cancel{2}}(\cancel{2}x)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\right] + j\left[\frac{n}{\cancel{2}}(\cancel{2}y)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\right] +$$

$$+ k\left[\frac{n}{\cancel{2}}(2z)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\right]$$

$$= n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\left[xi+yj+zk\right]$$

$$= n\,(r^2)^{\frac{n-2}{2}}\underbrace{(r)}_{R} = n.r^{n-2}.r.$$ وهـ.م

<u>تمرين 7</u> أوجد معادلة المستوي المماس للسطح:

$$2xz^2-3xy-4x=7$$

عند النقطة $(1,-1,2)$.

الحل:

$$f = 2xz^2-3xy-4x$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

$$\Rightarrow \nabla f = (2z^2-3y-4)i + (-3x)j + (4xz)k$$

$$|\nabla f| = \sqrt{(2z^2-3y-4)^2+(-3x)^2+(4xz)^2}$$

وبالتالي متجه الناظم على السطح عند النقطة $(1,-1,2)$:

$$\Rightarrow n = \frac{\nabla f(1,-1,2)}{|\nabla f|_{(1,-1,2)}} = \frac{(8+3-4)i+(-3)j+(4.1.2)k}{\sqrt{(7)^2+(-3)^2+(8)^2}}$$

أو

$$|\nabla f(1,-1,2)|$$

$$= \frac{7i-3j+8k}{\sqrt{49+9+64}} = \frac{1}{\sqrt{122}}(7i-3j+8k)$$

وتكون معادلة المستوي المماس:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-1,2)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-1,2)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,-1,2)}(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow 7(x-1)-3(y+1)+8(z-2)=0$$

تمرين 8 | أوجد مشتق $F=x^2yz+4xz^2$ عند النقطة $(1,-2,-1)$

في اتجاه المتجه: $A=2i-j-2k$

الحل:

$$\nabla F=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)(x^2yz+4xz^2)$$

$$=i\,\frac{\partial(x^2yz+4xz^2)}{\partial x}+j\,\frac{\partial(x^2yz+4xz^2)}{\partial y}+k\,\frac{\partial(x^2yz+4xz^2)}{\partial z}$$

$$=i(2xyz+4z^2)+j(x^2z)+k(x^2y+8xz)$$

$$\Rightarrow \left.\nabla F\right|_{(1,-2,-1)}=8i-j-10k$$

لنوجد متجه وحدة المتجه $A=2i-j-2k$

$$|A|=\sqrt{4+1+4}=3 \quad\Rightarrow u=\frac{A}{|A|}=\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}j-\frac{2}{3}k$$

فيكون المشتق الموجه المطلوب هو:

$$\left.\nabla F\right|_{(1,-2,-1)}\cdot u=(8i-j-10k)\left(\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}j-\frac{2}{3}k\right)$$

$$=(8)\left(\frac{2}{3}\right)+(-1)\left(-\frac{1}{3}\right)+(-10)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{16}{3}+\frac{1}{3}+\frac{20}{3}=\frac{37}{3}$$

وهي موجبة و F تتزايد في هذا الاتجاه.

تمرين 9 نفرض $F = 2x^3y^2z^4$ والمطلوب:

1) أوجد $\nabla . \nabla F$ أو $\text{div grad } F$

2) بين أن $\nabla . \nabla F = \nabla^2 F$ حيث: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

الحل: 1) $\nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)(2x^3y^2z^4)$

$$= i \frac{\partial(2x^3y^2z^4)}{\partial x} + j \frac{\partial(2x^3y^2z^4)}{\partial y} + k \frac{\partial(2x^3y^2z^4)}{\partial z}$$

$$= i(6x^2y^2z^4) + j(4x^3yz^4) + k(8x^3y^2z^3)$$

$$\nabla . \nabla F = \frac{\partial(6x^2y^2z^4)}{\partial x} + \frac{\partial(4x^3yz^4)}{\partial y} + \frac{\partial(8x^3y^2z^3)}{\partial z}$$

$$= 12xy^2z^4 + 4x^3z^4 + 24x^3y^2z^2$$

2) نعوض F [illegible]

$$\nabla . \nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F = \nabla^2 F$$

تمرين 10 أثبت أن:

1) $\nabla(A + B) = \nabla A + \nabla B$

2) $\nabla(\phi A) = (\nabla \phi) A + \phi (\nabla A)$

الحل : 1 نفرض أن :

$$\left.\begin{aligned} A &= A_1 i + A_2 j + A_3 k \\ B &= B_1 i + B_2 j + B_3 k \end{aligned}\right\} \Rightarrow A+B = (A_1+B_1)i + (A_2+B_2)j + (A_3+B_3)$$

$$\nabla(A+B) = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)\left((A_1+B_1)i + (A_2+B_2)j + (A_3+B_3)k\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_1+B_1) + \frac{\partial}{\partial y}(A_2+B_2) + \frac{\partial}{\partial z}(A_3+B_3)$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_3}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)(A_1 i + A_2 j + A_3 k) +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)(B_1 i + B_2 j + B_3 k) =$$

$$= \nabla A + \nabla B$$

2

$$\nabla(\phi A) = \nabla(\phi A_1 i + \phi A_2 j + \phi A_3 k)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)(\phi A_1 i + \phi A_2 j + \phi A_3 k)$$

$$= \frac{\partial(\phi A_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi A_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi A_3)}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \phi \frac{\partial A_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \phi \frac{\partial A_2}{\partial y}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k\right)(A_1 i + A_2 j + A_3 k) +$$

$$+ \phi\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)(A_1 i + A_2 j + A_3 k) =$$

$$= (\nabla \phi) A + \phi (\nabla A)$$

تمرين 11 أثبت أن $\nabla \frac{r}{r^3} = 0$

الحل: ط1

$$\nabla \frac{r}{r^3} = \frac{(\nabla r) r^3 - (\nabla r^3) r}{r^6} = \frac{3r^3 - (3r^2) r}{r^6}$$

$r = xi + yj + zk$

$$= \frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} = 0$$

$$\nabla r = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\nabla r^3 = 3r^2$$

ط2

$$\nabla \frac{r}{r^3} = \nabla (r . r^{-3}) = (\nabla r) r^{-3} + r (\nabla r^{-3})$$

$$= 3(r^{-3}) + r(-3 r^{-3-1}) = 3r^{-3} - 3r^{-3} = 0$$

تمرين 12 أثبت أن: $\nabla(U \nabla V - V \nabla U) = U \nabla^2 V - V \nabla^2 U$

الحل:

$$\nabla(U \nabla V - V \nabla U) = \nabla(U \nabla V) - \nabla(V \nabla U)$$

$$= \cancel{\nabla U \nabla V} + U \nabla^2 V - \cancel{\nabla V \nabla U} - V \nabla^2 U$$

$$= U \nabla^2 V - V \nabla^2 U$$

تمرين 13 أوجد الثابت a بحيث يكون المتجه

$$V = (x+3y)i + (y-2z)j + (x+az)k$$

لولبياً.

الحل : ~~نحن~~ يكون المتجه لولبياً إذا كان $\operatorname{div} V = 0$ تباعده صفر

$$\operatorname{div} V = \nabla V = \frac{\partial (x+3y)}{\partial x} + \frac{\partial (y-2z)}{\partial y} + \frac{\partial (x+az)}{\partial z}$$

$$= 1 + 1 + a \quad \Rightarrow \quad 1+1+a = 0$$ كونه لولبي

$$\Rightarrow a = -2$$

تمرين 14 لنفرض $F = x^2 z\, i - 2y^3 z^2 j + x y^2 z\, k$

أوجد $\operatorname{div} F$ عند النقطة $(1,-1,1)$

الحل :

$$\operatorname{div} F = \nabla F = \frac{\partial (x^2 z)}{\partial x} + \frac{\partial (-2y^3 z^2)}{\partial y} + \frac{\partial (x y^2 z)}{\partial z}$$

$$= 2xz - 6y^2 z^2 + x y^2$$

$$\operatorname{div} F \Big|_{(1,-1,1)} = 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2 + (1)(-1)^2 = 2 - 6 + 1 = -3$$

تمرين 15 إذا كان : $F = x z^3 i - 2x^2 y z\, j + 2y z^4 k$

أوجد $\nabla \times F$ عند النقطة $(1,-1,1)$

الحل :

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \times \left(x z^3 i - 2x^2 y z\, j + 2y z^4 k\right)$$

Scanned by CamScanner

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial(2yz^4)}{\partial y} + \frac{\partial(2x^2yz)}{\partial z} \right] i - \left[\frac{\partial(2yz^4)}{\partial x} - \frac{\partial(xz^3)}{\partial z} \right] j$$

$$+ \left[\frac{\partial(-2x^2yz)}{\partial x} - \frac{\partial(xz^3)}{\partial y} \right] k$$

$$= \left[2z^4 + 2x^2y \right] i - \left[0 - 3xz^2 \right] j + \left[-4xyz - 0 \right] k$$

$$= (2z^4 + 2x^2y)\, i + 3xz^2\, j - 4xyz\, k$$

$$\nabla \times F \Big|_{(1,-1,1)} = \left[2(1)^4 + 2(1)^2(-1) \right] i + \left[3(1)(1)^2 \right] j - 4\left[(1)(-1)(1) \right] k$$

$$= (2-2)\, i + 3j + 4k = 3j + 4k$$

$\boxed{\text{تمرين 16}}$ إذا كان : $A = x^2y\, i - 2xz\, j + 2yz\, k$

أوجد $rot\,(\nabla \times A)$

الحل :

$$rot(\nabla \times A) = \nabla \times (\nabla \times A)$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial(2yz)}{\partial y} + \frac{\partial(2xz)}{\partial z}\right] - j\left[\frac{\partial(2yz)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial z}\right]$$

$$+ k\left[\frac{\partial(-2xz)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right]$$

$$= i\left[2z + 2x\right] - j\left[0 - 0\right] + k\left[-2z - x^2\right]$$

$$\Rightarrow rot(\nabla \times A) = \nabla \times (\nabla \times A) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z+2x & 0 & -x^2-2z \end{vmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial(-x^2-2z)}{\partial y} - 0\right] - j\left[\frac{\partial(-x^2-2z)}{\partial x} - \frac{\partial(2z+2x)}{\partial z}\right]$$

$$+ k\left[0 - \frac{\partial(2z+2x)}{\partial y}\right]$$

$$= 0i - j\left[-2x - 2\right] + 0k = (2+2x)j$$

$\boxed{\text{تمرین 17}}$ اثبت أن :

① $\nabla \times (A+B) = \nabla \times A + \nabla \times B$

② $\nabla \times (\phi A) = (\nabla\phi) \times A + \phi(\nabla \times A)$

الحل : ① بفرض :

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$
$$B = B_1 i + B_2 j + B_3 k$$

$$\nabla \times (A+B) = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \times \left[(A_1+B_1)i + (A_2+B_2)j + (A_3+B_3)k\right]$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1+B_1 & A_2+B_2 & A_3+B_3 \end{vmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial(A_3+B_3)}{\partial y} - \frac{\partial(A_2+B_2)}{\partial z}\right] - j\left[\frac{\partial(A_3+B_3)}{\partial x} - \frac{\partial(A_1+B_1)}{\partial z}\right]$$

$$+ k\left[\frac{\partial(A_2+B_2)}{\partial x} - \frac{\partial(A_1+B_1)}{\partial y}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right] i - \left[\frac{\partial A_3}{\partial x} + \frac{\partial B_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial B_1}{\partial z}\right] j$$

$$+ \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right] k$$

$$= \left[\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right] i - \left[\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right] j + \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right] k$$

$$+ \left[\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right] i - \left[\frac{\partial B_3}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial z}\right] j + \left[\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right] k$$

$$= \nabla \times A + \nabla \times B$$

(2)

$$\nabla \times (\phi A) = \nabla \times (\phi A_1 i + \phi A_2 j + \phi A_3 k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial(\phi A_3)}{\partial y} - \frac{\partial(\phi A_2)}{\partial z}\right] - j\left[\frac{\partial(\phi A_3)}{\partial x} - \frac{\partial(\phi A_1)}{\partial z}\right]$$

$$+ k\left[\frac{\partial(\phi A_2)}{\partial x} - \frac{\partial(\phi A_1)}{\partial y}\right] =$$

$$= i\left[\phi\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y}A_3 - \phi\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_2\right] -$$

$$- j\left[\phi\frac{\partial A_3}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}A_3 - \phi\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_1\right] +$$

$$+ k\left[\phi\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}A_2 - \phi\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y}A_1\right]$$

$$= \phi\left(\left[\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right]i - \left[\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right]j + \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right]k\right),$$

$$+ \left(\left[\frac{\partial \phi}{\partial y}A_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_2\right]i - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}A_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z}A_1\right]j + \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}A_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right.\right.$$

$$= \phi(\nabla \times A) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \phi(\nabla \times A) + (\nabla \phi) \times A$$

$\boxed{\text{تمرين 18}}$ أوجد الثوابت a, b, c بحيث يكون المتجه V دوراني.

$$V = (2x + 2y + az)i + (bx - 3y - z)j + (4x + cy + 2z)k$$

الحل: يكون المتجه دوراني إذا كان: $\text{rot}V = 0$

$$\operatorname{rot} V = \nabla \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial(4x+cy+2z)}{\partial y} - \frac{\partial(bx-3y-z)}{\partial z}\right] -$$

$$- j\left[\frac{\partial(4x+cy+2z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x+2y+az)}{\partial z}\right] +$$

$$+ k\left[\frac{\partial(bx-3y-z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x+2y+az)}{\partial y}\right] =$$

$$= i(c+1) - j(4-a) + k(b-2) = 0 \longrightarrow$$ [illegible] دوراني

$$\Rightarrow c = -1 \qquad b = 2 \qquad -(4-a) = 0$$
$$-4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$V = (2x+2y+4z)i + (2x-3y-z)j + (4x-y+2z)k$$

تمرين 19

إذا كان :

$$A = 2yz\,i - x^2y\,j + xz^2\,k$$

$$B = x^2\,i + yz\,j - xy\,k$$

$$\phi = 2x^2yz^3$$

أوجد :

① $(A.\nabla)\phi$ ② $A.(\nabla\phi)$

③ $(B.\nabla)A$ ④ $(A\times\nabla)\phi$ ⑤ $A\times(\nabla\phi)$

الحل : ①

$$(A.\nabla)\phi = \left[(2yz\,i - x^2y\,j + xz^2\,k)\left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)\right]\phi$$

$$= \left(2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)(2x^2yz^3)$$

$$= 2yz\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^3) - x^2y\frac{\partial(2x^2yz^3)}{\partial y} + xz^2\frac{\partial(2x^2yz^3)}{\partial z}$$

$$= 2yz(4xyz^3) - x^2y(2x^2z^3) + xz^2(6x^2yz^2)$$

$$= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4$$

(2) $$A\cdot(\nabla\phi) = (2yzi - x^2yj + xz^2k)\left(\frac{\partial(2x^2yz^3)}{\partial x}i + \frac{\partial(2x^2yz^3)}{\partial y}j + \frac{\partial(2x^2yz^3)}{\partial z}k\right)$$

$$= (2yzi - x^2yj + xz^2k)(4xyz^3i + 2x^2z^3j + 6x^2yz^2k)$$

$$= (2yz)(4xyz^3) + (-x^2y)(2x^2z^3) + (xz^2)(6x^2yz^2)$$

$$= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4$$

ملاحظة:

$$(\nabla A)\phi = A\nabla\phi$$

(3) $$(B\cdot\nabla)A = \left[(x^2i + yzj - xyk)\left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)\right]A$$

$$= \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} - xy\frac{\partial}{\partial z}\right)(2yzi - x^2yj + xz^2k)$$

$$= x^2\frac{\partial}{\partial x}(2yzi - x^2yj + xz^2k) + yz\frac{\partial}{\partial y}(2yzi - x^2yj + xz^2k)$$
$$- xy\frac{\partial}{\partial z}(2yzi - x^2yj + xz^2k)$$

$$= x^2(-2xy\,j + z^2 k) + yz(2z\,i - x^2 j) - xy(2y\,i + 2xz\,k)$$

$$= (2yz^2 - 2xy^2)\,i + (-2x^3y - x^2yz)\,j + (x^2z^2 - 2x^2yz)\,k$$

(4) $(A\times\nabla)\,\phi$: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = A\times\nabla$

$$\Rightarrow A\times\nabla = i\left[-x^2y\frac{\partial}{\partial z} - xz^2\frac{\partial}{\partial y}\right] - j\left[2yz\frac{\partial}{\partial z} - xz^2\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

$$+ k\left[2yz\frac{\partial}{\partial y} + x^2y\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow (A\times\nabla).\,\phi = i\left(-x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z} - xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - j\left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial z} - xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

$$+ k\left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \quad ; \ \phi = 2x^2yz^3$$

$$= i\left[-x^2y(6x^2yz^2) - xz^2(2x^2z^3)\right] -$$

$$-j\left[2yz(6x^2yz^2) - xz^2(4xyz^3)\right] +$$

$$+ k\left[2yz(2x^2z^3) + x^2y(4xyz^3)\right]$$

$$= i\left(-6x^4y^2z^2 - 2x^3z^5\right) - j\left(12x^2y^2z^3 - 4x^2yz^5\right)$$

$$+ k\left(4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3\right)$$

(5) $A\times(\nabla\phi) = (2yz\,i - x^2y\,j + xz^2 k)\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k\right)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= i\left(-x^2y\frac{\partial \phi}{\partial z} - xz^2\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - j\left(2yz\frac{\partial \phi}{\partial z} - xz^2\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$+k\left(2yz\frac{\partial \phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$= i\left[-x^2y(6x^2yz^2) - xz^2(2x^2z^3)\right] -$$

$$-j\left[2yz(6x^2yz^2) - xz^2(4xyz^3)\right] +$$

$$+k\left[2yz(2x^2z^3) + x^2y(4xyz^3)\right]$$

$$= i\left[-6x^4y^2z^2 - 2x^3z^5\right] - j\left[12x^2y^2z^3 - 4x^2yz^5\right] +$$

$$+k\left[4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3\right]$$

لاحظ :

$$(A \times \nabla)\phi = A \times (\nabla \phi)$$

جملة الإحداثيات

في المستوي

1- الإحداثيات الديكارتية: $-\infty < x,y < +\infty$

i, j متجهات الوحدة

$$\boxed{\text{متجه الموضع} \quad \vec{OM} = r\vec{I}}$$

2- الإحداثيات القطبية: (r,θ)

$r \geq 0$

$2\pi > \theta \geq 0$

محمول على OM

I, J متجه الوحدة

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arctan \dfrac{y}{x}$

$I = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$

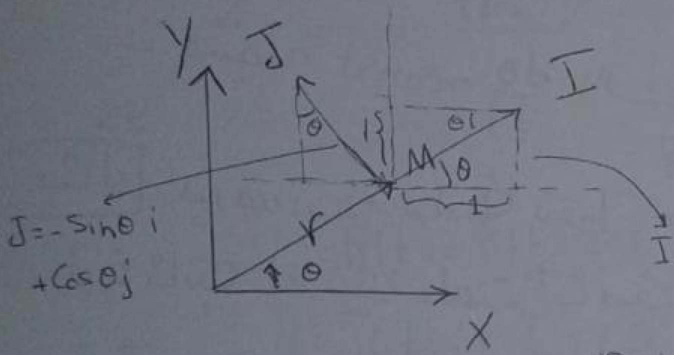
$J = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j$

تابع لـ t

يعني:

$J = -\sin\theta(t)\, i + \cos\theta(t)\, j$

$I = \cos\theta(t)\, i + \sin\theta(t)\, j$



$$R(t) = r(\cos\theta\, i + \sin\theta\, j)$$

$$\boxed{\frac{dJ}{d\theta} = -I} \qquad \boxed{\frac{dI}{d\theta} = J}$$

1) السرعة: لدينا: $R = rI$

متجه السرعة

$$V = \frac{dR}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot I + r\frac{dI}{dt} \quad \text{تابع لـ } \theta$$

$$= \frac{dr}{dt} \cdot I + r \underbrace{\frac{dI}{d\theta}}_{J} \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\theta'} = r' I + r\theta' J$$

منحى التسارع

متجه التسارع :

$$\vec{a} = (\vec{OM})'' = \vec{V}' = (r'I + r\theta'J)' =$$

$$= r''I + r'\frac{dI}{dt} + r'\theta'J + r\theta''J + r\theta'\frac{dJ}{dt}$$

$$= r''I + r'\frac{dI}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r'\theta'J + r\theta''J + r\theta'\frac{dJ}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r''I + r'\theta'J + r'\theta'J + r\theta''J + r\theta'\theta'(-I)$$

$$= (r'' - r\theta'^2)I + (r\theta'' + 2r'\theta')J$$

- الحركة دائرية $\frac{dr}{dt} = 0$
- منتظمة $\frac{d\theta}{dt} = const$ (السرعة الزاوية ثابتة)

$\boxed{\text{مثال}}$ بفرض نقطة مادية تتحرك من مركز عجلة إلى إطارها لتدور بسرعة زاوية ثابتة ω فإذا علمت أن متجه موضعها يعطى بالعلاقة $R(t) = tI$ أوجد السرعة والتسارع للنقطة المادية كدالة تابعة للزمن.

الحل :

$$V(t) = (R(t))' = I + t\frac{dI}{dt} = I + t\frac{dI}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= I + t\frac{d\theta}{dt}\cdot J$$

$\frac{d\theta}{dt} = C \Leftarrow$ السرعة الزاوية ثابتة $\theta'' = 0$

$$a(t) = (V(t))' = \frac{dI}{dt} + \frac{d\theta}{dt}\cdot J + t\frac{d^2\theta}{dt^2}\cdot J + t\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dJ}{dt}$$

$$= \frac{dI}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta}{dt}\cdot J + t\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dJ}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d\theta}{dt}J + \frac{d\theta}{dt}J - t\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 I = 2\frac{d\theta}{dt}J - t\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 I$$

في الفراغ

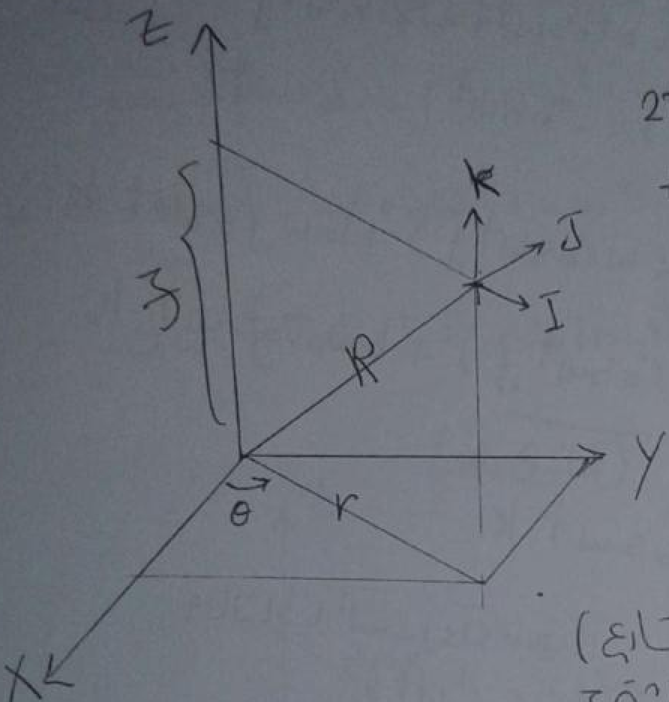
ا- الإحداثيات الديكارتية $-\infty < x, y, z < +\infty$

2- الإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z)

$r \geq 0$

$2\pi > \theta \geq 0$

$+\infty > z > -\infty$



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

المتجهات الثلاثة (الموضع - السرعة - التسارع) كما في القطبية ونضيف المركبة الثالثة z :

$$R(t) = r(t)\, I + z(t)\, k$$

$$V(t) = r' I + r\theta' J + z' k$$

$$a = (r'' - r\theta'^2) I + (r\theta'' + 2r'\theta') J + z'' k$$

$I = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$
$J = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j$

$\frac{dJ}{d\theta} = -J \qquad \frac{dI}{d\theta} = J$ ونفس القوانين الأساسية

نثبت السرعة والتسارع :

$$V = (R(t))' = r' I + r \frac{dI}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + z' k \longrightarrow$$ لا يوجد k'

$$\Rightarrow \boxed{V = r' I + r\theta' J + z' k}$$

$$a = (V(t))' = r'' I + r'\theta' J + r'\theta' J + r\theta'' J + r\theta' \frac{dJ}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + z''$$

$$= r'' I + 2r'\theta' J + r\theta'' J - r\theta'^2 I + z'' k$$

$$\Rightarrow \boxed{a = (r'' - r\theta'^2) I + (2r'\theta' + r\theta'') J + z'' k}$$

مثال أوجد متجه السرعة والتسارع لنقطة متجه موضعها معطى بالعلاقة:

$$R(t)=a(\cos wt\, i+\sin wt\, j)+b\sin wt\, k \quad ; t\geq 0$$

الحل: $I=\cos wt\, i+\sin wt\, j$ حيث $\theta=wt$

$J=-\sin wt\, i+\cos wt\, j$

$$V(t)=R'(t)=a(-w\sin wt\, i+w\cos wt\, j)+bw\cos wt\, k$$

$$=aw(\underbrace{-\sin wt\, i+\cos wt\, j}_{J})+bw\cos wt\, k$$

$$\Rightarrow V=aw.J+bw\cos wt\, k$$

وبالتالي السرعة هي:

$$V=\sqrt{a^2w^2+b^2w^2\cos^2 wt}=w(a^2+b^2\cos^2 wt)^{\frac{1}{2}}$$

- ملاحظة: يمكن إيجاد V بالطريقة:

$$R(t)=aI+b\sin wt\, k$$

$$V(t)=R'(t)=a\frac{dI}{dt}+bw\cos wt\, k$$

$$=a\underbrace{\frac{dI}{d\theta}}_{J}\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\frac{dwt}{dt}=w}+bw\cos wt\, k=awJ+bw\cos wt\, k$$

$$a(t)=V'(t)=aw\frac{dJ}{dt}-bw^2\sin wt\, k$$

$$=aw\underbrace{\frac{dJ}{d\theta}}_{-I}\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{w}-bw^2\sin wt\, k$$

$$= -a\omega^2 I - b\omega^2 \sin\omega t\, k$$

$$= -\omega^2 R(t)$$

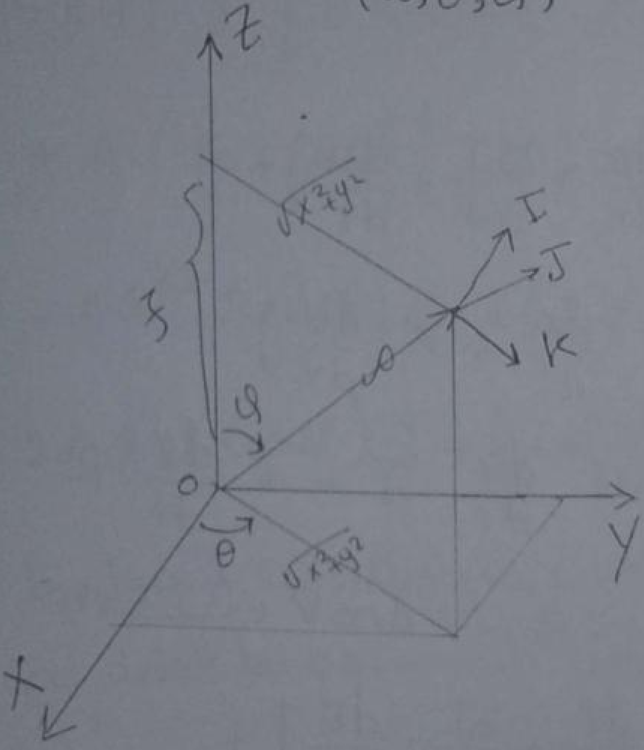
ويمكن لإيجاد $V'(t)$ نبدل في عبارة $v(t)$.

ثم نشتق $J = -\sin\omega t\, i + \cos\omega t\, j$

$$V'(t) = a\omega[-\omega\cos\omega t\, i - \omega\sin\omega t\, j] - b\omega^2 \sin\omega t\, k$$

$$= -a\omega^2[\cos\omega t\, i + \sin\omega t\, j] - b\omega^2 \sin\omega t\, k$$

3- الإحداثيات الكروية (ρ, θ, φ)



$\rho \geq 0$

$2\pi > \theta \geq 0$

$\pi > \varphi \geq 0$

$x = \rho\cos\theta\sin\varphi$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$

$z = \rho\cos\varphi$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta = \arctan\frac{y}{x}$

$\varphi = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

$$R(t) = \rho\underbrace{\sin\varphi\cos\theta\, i + \rho\sin\varphi\sin\theta\, j + \rho\cos\varphi\, k}_{I}$$

$R = \rho\, I(\theta, \varphi) \longrightarrow$ سابقا كان $I(\theta)$ الآن لدينا φ, θ

مثـ :

$$I = \sin\varphi\cos\theta\, i + \sin\varphi\sin\theta\, j + \cos\varphi\, k$$

$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = k$	$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \sin\varphi\, J$
$\frac{\partial J}{\partial \varphi} = 0$	$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -(\sin\varphi\, I + \cos\varphi\, k)$
$\frac{\partial k}{\partial \varphi} = -I$	$\frac{\partial k}{\partial \theta} = \cos\varphi\, J$

$$V = \frac{d\rho}{dt} I + \rho \frac{dI}{dt} =$$

$$= \frac{d\rho}{dt} I + \rho\left(\frac{\partial I}{\partial \theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial I}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$= \frac{d\rho}{dt} I + \rho\left(\sin\varphi\, J \frac{d\theta}{dt} + k \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{d\rho}{dt} I + \rho \sin\varphi \frac{d\theta}{dt} J + \rho \frac{d\varphi}{dt} k$$

باشتقاق V نحصل على a :

$$a = \frac{d^2\rho}{dt^2} I + \frac{d\rho}{dt}\left[\frac{\partial I}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial I}{\partial \theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right] +$$

$$+ \frac{d\rho}{dt}\cdot \sin\varphi \frac{d\theta}{dt} J + \rho \sin\varphi \frac{d^2\theta}{dt^2} J +$$

$$+ \rho \varphi' \frac{d\theta}{dt} \cos\varphi\, J + \rho \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}\cdot\left[\underbrace{\frac{\partial J}{\partial \varphi}}_{=0}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial J}{\partial \theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right] + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} k + \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} k +$$

$$+ \rho \frac{d\varphi}{dt}\left[\frac{\partial K}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial K}{\partial\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right] =$$

$$= \rho'' I + \rho'\left[\varphi' K + \theta' \sin\varphi\, J\right] + \rho'(\sin\varphi).\,\theta' J$$

$$+ \rho(\sin\varphi).\theta'' J + \rho\varphi'\theta' \cos\varphi\, J +$$

$$+ \rho(\sin\varphi).\,\theta'\left[-\theta' \sin\varphi\, I - \theta' \cos\varphi\, K\right] + \rho'\varphi' K$$

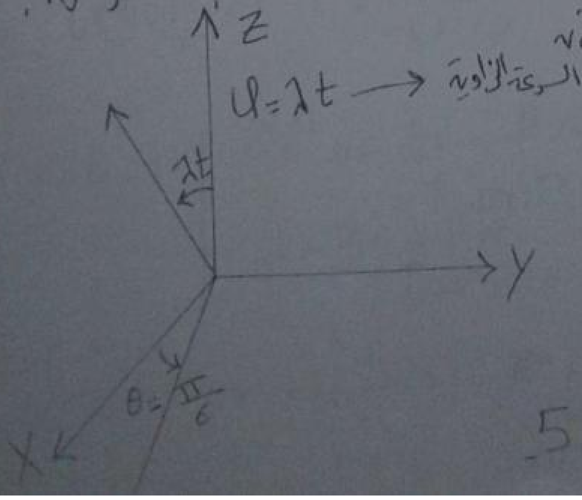
$$+ \rho\varphi'' K + \rho\varphi'\left[-\varphi' I + \theta' \cos\varphi\, J\right]$$

$$= \left(\rho'' - \rho\theta'^2 \sin^2\varphi\right) I + \left(2\rho'\theta' \sin\varphi + \rho\theta'' \sin\varphi + 2\rho\theta'\varphi' \cos\varphi\right) J + \left(2\rho'\varphi' + \rho\theta'' - \rho\theta'^2 \sin\varphi\cos\varphi\right.$$

مثال : بفرض نقطة مادية تتحرك بسرعة زاوية ثابتة λ حول خط الطول في كرة نصف قطرها a ، وبفرض أن مستوى خط الطول يصنع زاوية قدرها $\theta = \frac{\pi}{6}$ مع محور السينات.
أوجد متجهي السرعة والتسارع للنقطة المادية بالنسبة للزمن.

حل:

$\varphi = \lambda t \longrightarrow$ السرعة الزاوية $= \lambda = \varphi'$



كروية $\begin{cases} \varphi = \lambda t \\ \theta = \frac{\pi}{6} \\ \rho = a \end{cases}$

$$R(t) = a\cos\frac{\pi}{6}\sin\lambda t\, i + a\sin\frac{\pi}{6}\sin\lambda t\, j + a\cos\lambda t\, k$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\lambda t\, i + \frac{a}{2}\sin\lambda t\, j + a\cos\lambda t\, k$$

$$V(t) = R'(t) = \frac{a\sqrt{3}}{2}\lambda\cos\lambda t\, i + \frac{a\lambda}{2}\cos\lambda t\, j - a\lambda\sin\lambda t\, k$$

$$a(t) = V'(t) = -\frac{a\sqrt{3}}{2}\lambda^2\sin\lambda t\, i - \frac{a\lambda^2}{2}\sin\lambda t\, j - a\lambda^2\cos\lambda t\, k$$

$$= -\lambda^2 R(t)$$

تمارين: **تمرين 1** ملاحظة: إذا كان $\vec{V} = \vec{V}(\theta)$

$\theta = \theta(t)$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

ليكن $\vec{V} = e^{2\theta}$ و $\theta = 2\omega t$ أوجد V'_t

الحل:

$$V'_t = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = 2e^{2\theta}\cdot(2\omega) = 4\omega e^{2\theta}$$

$$= 4\omega e^{4\omega t}$$ ← نبدل θ بدلالة ω

تمرين 2 بفرض أن جسيم يتحرك بالمعادلة المتجهة:

$$r = \cos\omega t\, i + \sin\omega t\, j$$

حيث ω ثابت. بين أن $r(t)\times V(t)$ هي دالة ثابتة.

الحل:

$$r(t)\times V(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

حيث: $V = r' = -\omega\sin\omega t + \omega\cos\omega t\, j$

$$\Rightarrow r(t) \times v(t) = (w\cos^2 wt + w\sin^2 wt)k = wk$$

وهي دالة ثابتة.

$\boxed{\text{تمرين 3}}$ جسم يتحرك وفق المعادلة المتجهة:

$$r(t) = e^{-t}\, i + 2\cos 3t\, j + 2\sin 3t\, k$$

حيث t هو الزمن والمطلوب:

1) احسب سرعة وتسارع الجسم في لحظة ما t.

2) احسب مقادير السرعة والتسارع عند $t=0$.

الحل: 1)

$$V = \frac{dr}{dt} = -e^{-t}\, i - 6\sin 3t\, j + 6\cos 3t\, k$$

$$a = \frac{dv}{dt} = e^{-t}\, i - 18\cos 3t\, j - 18\sin 3t\, k$$

2) عندما $t=0$ يكون:

$$V = \cancel{1}.i - 0 + 6k \qquad a = i - 18j + 0$$

$$V = \sqrt{(-1)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$a = \sqrt{(1)^2 + (-18)^2} = \sqrt{1+324} = \sqrt{325}$$

$\boxed{\text{تمرين 4}}$ يتحرك جسم وفق المعادلة المتجهة:

$$r(t) = 2t^2\, i + (t^2 - 4t)\, j + (3t - 5)\, k$$

حيث t هو الزمن.

والمطلوب: أوجد مقدار السرعة والتسارع عند الزمن $t=1$ في الاتجاه.

$$i - 3j + 2k$$

Scanned by CamScanner

الحل:

$$V = \frac{dr}{dt} = 4t\, i + (2t-4) j + 3k$$

$$t=1: \quad V = 4i - 2j + 3k$$

متجه الوحدة في الاتجاه المفروض:

$$u = \frac{i - 3j + 2k}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2}} = \frac{i - 3j + 2k}{\sqrt{14}}$$

وبالتالي مقدار السرعة في الاتجاه المعطى:

$$\vec{V} \cdot \vec{u} = \frac{(4i - 2j + 3k)(i - 3j + 2k)}{\sqrt{14}} = \frac{(4)(1) + (-2)(-3) + (3)(2)}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{4+6+6}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{16\sqrt{14}}{14} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$$

$$\vec{a} = \cancel{4t}\, V'(t) = 4i + 2j + 0k = 4i + 2j$$

ويكون مقدار التسارع في الاتجاه المعطى:

$$\frac{(4i + 2j)(i - 3j + 2k)}{\sqrt{14}} = \frac{-2}{\sqrt{14}} = \frac{-\sqrt{14}}{7}$$

تمرين 5 نفرض $M(r, \theta)$ نقطة مادية تتحرك على منحنى معين من مستوٍ معادلته $r = a e^{\theta}$ وفق القانون الزمني $\theta = wt$

أوجد بدلالة θ متجه السرعة.

الحل:

$$oM = rI \Rightarrow (\vec{oM})' = r' I + r \theta' J$$

$$r = a e^{\theta} \Rightarrow r' = a\theta' e^{\theta}$$

$$\theta = wt \Rightarrow \theta' = w$$

$\Rightarrow r' = a\omega e^{\theta}$

$$(\overrightarrow{OM})' = (a\omega e^{\theta})\, I + (a\omega e^{\theta}\theta)\, J$$

ويكون :
$$\|(\overrightarrow{OM})'\| = \sqrt{(a\omega e^{\theta})^2 + (a\omega e^{\theta}\theta)^2}$$